Материалы международной научно-практической конференции ученых Украины, Беларуси, России, Азербайджана, Израиля «Информационные технологии и информационная безопасность в науке, технике и образовании». "Инфотех – 2007".
Часть 1. г.Севастополь, 2007 г.

УДК 004, 539.18
И.М. Гуревич, канд. техн. наук
Институт проблем информатики РАН, ООО "ГЕТНЕТ Консалтинг"
г. Москва, Россия
iggurevich@gmail.com

ОБЪЕМ ИНФОРМАЦИИ В СЦЕПЛЕННЫХ (ЗАПУТАННЫХ) СОСТОЯНИЯХ

Сцепленные (спутанные, запутанные, перепутанные) состояния представляют собой физические объекты, имеющие большое значение в теоретических и экспериментальных исследованиях многих вопросов квантовых вычислений [1].

Оценим объем информации в системе, состоящей из n кубитов. Вначале рассмотрим системы с равновероятными базисными состояниями.

1. Предположим, что в системе содержится n не взаимодействующих кубитов. Пусть кубит описывается волновой функцией $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, где $|0\rangle, |1\rangle$ - базисные состояния кубита [1]. При измерениях кубита будут получены базисные состояния $|0\rangle$, $|1\rangle$ с равными вероятностями $\frac{1}{2}$. Неопределенность (информация) кубита в состоянии ψ равна 1 биту: $N_1 = I_1 = -(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}) = 1$.

Следовательно, в системе содержащей n не взаимодействующих кубитов с равновероятными базисными состояниями объем информации пропорционален числу кубитов и равен n бит.

Эта оценка определяет минимальный объем информации в системе из n кубитов с равновероятными базисными состояниями. Она же объясняет линейную зависимость объема информации от массы или количества частиц (элементарных систем) в обычном веществе (фундаментальных частицах - кварках, лептонах, фотонах). Из нее же вытекает основной принцип квантовой механики А. Цайлингера [2]: «Мы, таким образом, предлагаем следующий принцип квантования информации: элементарная система переносит (содержит) 1 бит информации».

2. Предположим, что в системе содержится n попарно взаимодействующих кубитов с равновероятными базисными состояниями. Система, состоящая из n взаимодействующих частиц (кубитов), может быть описана следующей волновой функцией (предложено А.Д. Пановым): $\psi_n^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle|0_2\rangle ... |0_n\rangle + |1_1\rangle|1_2\rangle ... |1_n\rangle)$.

Каждый кубит i имеет волновую функцию $\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_i\rangle + |1_i\rangle)$ ($|0_i\rangle, |1_i\rangle$ - базисные состояния i-го кубита). Информация связи каждой пары взаимодействующих кубитов i, j равна единице (одному биту) [3]. Покажем это. Сцепленное (запутанное) состояние кубитов i, j состояние кубита j полностью определено, если известно состояние кубита i, и, наоборот, состояние кубита i полностью определено, если известно состояние кубита j. Для состояния $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_i\rangle|0_j\rangle + |1_i\rangle|1_j\rangle)$ вероятности реализации базисных состояний равны $P(|0_i\rangle) = P(|1_i\rangle = \frac{1}{2}$, $P(|0_j\rangle)) = P(|1_j\rangle) = \frac{1}{2}$; вероятности реализации пар состояний равны $P(|0_i\rangle|0_j\rangle) = P(|1_i\rangle|1_j\rangle) = \frac{1}{2}$. Совместные вероятности определяются матрицей $P_{сов} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Неопределенность (информационная энтропия) кубитов i, j равна $N_i = N_j = -(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}) = 1$.

Неопределенность (информационная энтропия) совместного распределения состояний кубита i и кубита j равна $N_{ij} = -(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}) = 1$.

Информация связи кубитов i и j равна $I_{ij} = N_i + N_j - N_{ij} = 1+1-1 = 1$.

Объем информации связи в системе из n попарно взаимодействующих кубитов с равновероятными базисными состояниями, описываемой волновой функцией

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle|0_2\rangle...|0_n\rangle + |1_1\rangle|1_2\rangle...|1_n\rangle),$$ равно $I_{n\,св} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$ бит.

Объем информации в системе из n попарно взаимодействующих кубитов, складывается из n бит информации содержащейся в кубитах и $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ бит информации связи между кубитами. Полный объем информации в системе, содержащей n попарно взаимодействующих кубитов с равновероятными базисными состояниями, равен

$$I_n = n + \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$ бит.

Данная оценка определяет максимальный объем информации в системе из n кубитов с равновероятными базисными состояниями. *В системе, содержащей n попарно взаимодействующих кубитов с равновероятными базисными состояниями, объем информации пропорционален квадрату числа кубитов и равен $I_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ бит.* Это определяет максимальный объем информации в системе из n кубитов. При $n >> 1$ объем информации в системе состоящей из n попарно взаимодействующих кубитов равен одной второй квадрата числа взаимодействующих кубитов $I_n \approx \frac{n^2}{2}$. Это объясняет квадратичную зависимость объема информации от массы в черных дырах.

Следует отметить, что состояние $\psi_n^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle|0_2\rangle...|0_n\rangle - |1_1\rangle|1_2\rangle...|1_n\rangle)$

содержит тот же объем информации. Состояния типа $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_i\rangle|1_j\rangle...|0_k\rangle - |1_i\rangle|0_j\rangle...|1_k\rangle)$ также описывают систему из n попарно взаимодействующих кубитов и содержат $I_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ бит. Но в соответствии с законом простоты сложных систем природа должна реализовать наиболее простые состояния, а именно, ψ^+, ψ^-.

3. В общем случае объем информации I_n в системе, состоящей из n кубитов с равновероятными базисными состояниями, не менее n бит и не более $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ бит:

$$n \le I_n \le \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

4. Система, состоящая из n кубит с равновероятными базисными состояниями, содержит информации больше на n бит, чем система, состоящая из $n-1$ кубита,

$$I_n - I_{n-1} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \frac{(n-1) \cdot n}{2} = n \cdot$$

5. Рассмотрим случай, когда в системе из n кубитов выделяются $\frac{n}{k}$ групп по k кубитов и каждый из k кубитов взаимодействует только с кубитами своей группы (считаем, что n делится на k). Тогда объем информации I_k в группе, состоящей из k попарно взаимодействующих кубитов с равновероятными базисными состояниями, равен $\frac{k \cdot (k+1)}{2}$ бит. Следовательно, в рассматриваемой системе из n кубитов содержится

$$I_{n/k} = \frac{n}{k} \frac{k \cdot (k+1)}{2} = \frac{n \cdot (k+1)}{2} \text{ бит.}$$

Это объясняет линейную зависимость объема информации от массы в составных частицах обычного вещества (например, в элементарных частицах - мезонах, барионах, а также атомах).

При $k = 1$ система содержит минимальный объем информации: $I_{n/1} = n \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = n$.

При $k = n$ система содержит максимальный объем информации:

$$I_{n/n} = \frac{n}{n} \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot$$

6. Если рассматривать системы из n кубитов с произвольными вероятностями реализации базисных состояний $|0\rangle$, $|1\rangle$, то кубит описывается волновой функцией $\psi = a|0\rangle + b|1\rangle$. При измерениях кубита будут получены базисные состояния $|0\rangle$, $|1\rangle$ с вероятностями $|a|^2$, $|b|^2$. Неопределенность (информация) кубита в состоянии ψ равна

$$N_1 = I_1 = -(|a|^2 \log_2 |a|^2 + |b|^2 \log_2 |b|^2).$$

В общем случае, объем информации I_n в системе, состоящей из n кубит, больше или равно нулю бит и не более $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ бит: $0 \le I_n \le \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Библиография

1. Валиев К.А., Кокин А.А. Квантовые компьютеры: Надежда и реальность. Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика». Москва-Ижевск. 2001.
2. Гуревич И.М. Информационные характеристики сцепленных состояний. Журнал Информационные технологии. № 5. М. 2006.
3. Zeilinger, Anton. A Foundational Principle for Quantum Mechanics", Foundations of Physics 29 (4): 631-43. (1999),